

VI. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXIII. EMMV
megyei szakasz, 2024. február 3.

VII. osztály

1. feladat. a) Igazold, hogy az alábbi a szám négyzetszám:

$$a = \sqrt{\frac{8}{7} + \frac{9}{14} + \frac{10}{21} + \cdots + \frac{119}{784} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{112}\right)}.$$

b) Igazold, hogy az alábbi b és c számok racionálisak:

$$b = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3} - \sqrt{4}}{\sqrt{12}} + \cdots + \frac{\sqrt{2024} - \sqrt{2025}}{\sqrt{4098600}},$$
$$c = \frac{360}{\sqrt{18}} + \frac{5}{(5 - 3\sqrt{2})^{2023}} \cdot \frac{(10 - 6\sqrt{2})^{2024}}{2^{2022}}.$$

2. feladat. Hány olyan különböző háromszög szerkeszthető, melyek oldalai mind különböző hosszúak, és az oldalak hosszai milliméterben kifejezve a 2024 szám valamelyik kétjegyű osztójával egyenlők?

3. feladat. Adott az $ABCD$ trapéz, ahol $AB \parallel CD$ és $AB > CD$. Az M pont a CD szakasz felezőpontja, illetve N az AB szakasz felezőpontja, valamint a nagyalapon fekvő szögek pótszögek.

a) Ha EF a trapéz középvonala, ahol $E \in AD$, $F \in BC$, valamint $\{Q\} = DB \cap EF$, mutasd ki, hogy $MQ \parallel BC$!

b) Igazold, hogy $MN < \frac{AD + BC}{2}$!

c) Bizonyítsd be, hogy $MN = \frac{AB - DC}{2}$!

4. feladat. Határozd meg azt az \overline{abcd} alakú négyjegyű természetes számot, amelyre fennáll az $\overline{abcd} = (2\overline{ab} + 4)(2\overline{cd} - 2)$ egyenlőség!