MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

IX. osztály

1. feladat (10 pont). Oldd meg az $\left[\dfrac{x^2+x}{2}+2021\right]=|x+2022|$ egyenletet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét, $|a|$ pedig a modulusát jelöli.

Matlap 10/2022 L:3515

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az egyenlőség bal oldala egy egész szám, így a jobb oldalon lévő kifejezés is egész kell legyen. Ez akkor és csakis akkor teljesülhet, ha x egész szám. **(2 pont)**
Továbbá bármely x egész szám esetén az $x^2+x=x(x+1)$ kifejezés páros, mert két egymást követő egész szám közül az egyik biztosan páros. Így $\frac{x^2+x}{2}$ is egész szám, tehát $[\frac{x^2+x}{2}+2021]=\frac{x^2+x}{2}+2021$. **(3 pont)**
Ezek alapján az egyenlet egyenértékű azzal, hogy $\frac{x^2+x}{2}+2021=|x+2022|$. Két esetet különböztetünk meg.

I. Ha $x\geq -2022$, akkor a következő egyenértékű átalakításokat végezhetjük:

$$\frac{x^2+x}{2}+2021=|x+2022| \iff \frac{x^2+x}{2}+2021=x+2022 \iff x^2-x-2=0.$$

Az utóbbi egyenlet megoldásai $x_1=-1\geq -2022$ és $x_2=2\geq -2022$. **(2 pont)**

II. Ha $x<-2022$, akkor a következő egyenértékű átalakításokat végezhetjük:

$$\frac{x^2+x}{2}+2021=|x+2022| \iff \frac{x^2+x}{2}+2021=-x-2022 \iff x^2+3x+8086=0.$$

Az utóbbi egyenletnek nincsenek valós megoldásai. **(1 pont)**
Tehát az egyenlet megoldáshalmaza $M=\{-1,2\}$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Igazold, hogy bármely $x,y,z>0$ valós számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

a) $2x\sqrt{yz}\leq x^2+yz$;

b) $\dfrac{1}{x^2+yz}+\dfrac{1}{y^2+xz}+\dfrac{1}{z^2+xy}\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\right)$;

c) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}\leq\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}$.

Durugy Erika, Torda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján minden $x, y, z > 0$ esetén

$$\sqrt{x^2 \cdot yz} \leq \frac{x^2 + yz}{2}.$$

Mivel $x > 0$, az következik, hogy $2x\sqrt{yz} \leq x^2 + yz$. **(2 pont)**

Megjegyzés. A bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy $0 \leq (x - \sqrt{yz})^2$, ami teljesül, bármely $x, y, z > 0$ esetén.

b) Az a) alpontban igazolt egyenlőtlenség alapján következik, hogy az $x, y, z > 0$ számok esetén $\frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}}$, hasonlóan $\frac{1}{y^2+zx} \leq \frac{1}{2y\sqrt{zx}}$ és $\frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2z\sqrt{xy}}$. **(1 pont)**
Összeadva az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} + \frac{1}{2y\sqrt{zx}} + \frac{1}{2z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}}{2xyz}.$$ **(1 pont)**

A számtani és mértani középarányosok közti egyenlőtlenség alapján minden $x, y, z > 0$ esetén $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, $\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$ és $\sqrt{xz} \leq \frac{x+z}{2}$, ahonnan $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} \leq \frac{2(x+y+z)}{2} = x + y + z$. Tehát $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{x+y+z}{2xyz}$, ez pedig egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}\right),$$

bármely $x, y, z > 0$ esetén. **(2 pont)**

c) Az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel beszorozva, majd átrendezve, a következő egyenértékű átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \\ \iff & 0 \leq \frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{yz} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{zx} + \frac{1}{x^2} \\ \iff & 0 \leq \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2, \end{aligned}$$

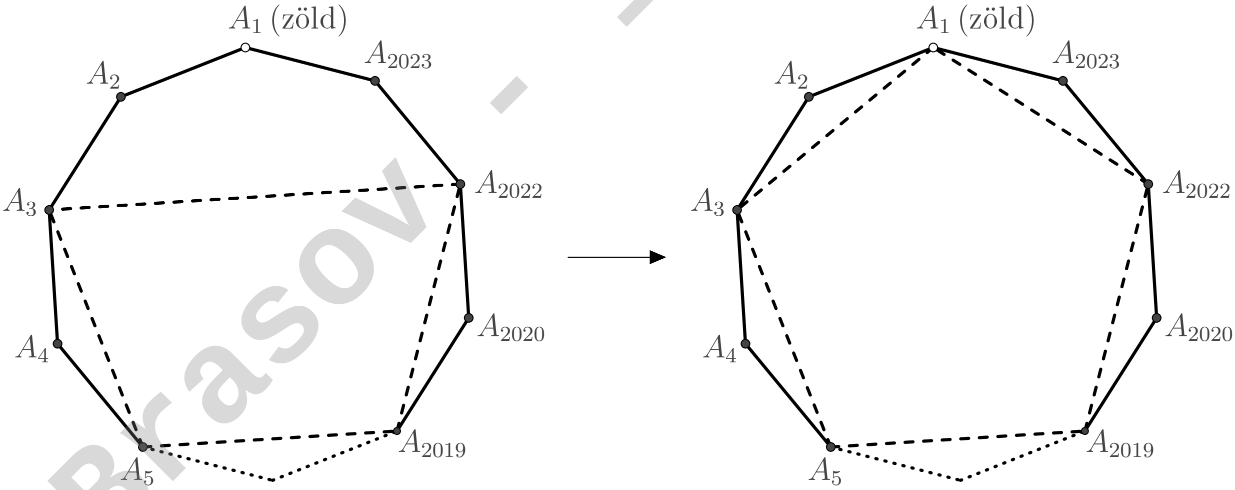
ez pedig teljesül minden $x, y, z > 0$ esetén. **(3 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Egy 2023 oldalú szabályos sokszög csúcsai közül egyet zöldre, a többit fehérre vagy pirosra festjük. Tekintsük az összes olyan konvex sokszöget, amelyeknek csúcsai az adott sokszög csúcsai közül valók. Mely konvex sokszögekből van több és mennyivel: azokból, amelyeknek egyik csúcsa zöld, vagy azokból, amelyeknek nincs zöld csúcsa?

Zay Éva, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Minden zöld csúccsal nem rendelkező konvex sokszöghöz társítható egy eggyel nagyobb oldalszámú konvex sokszög a zöld csúcs hozzáadásával. Így legalább annyi zöld csúccsal rendelkező sokszög van, mint ahány zöld csúcs nélküli. **(3 pont)**



Tekintjük azokat a háromszögeket, amelyeknek egyik csúcsa zöld, a másik két csúcs pedig fehér vagy piros. Ezekhez a konvex sokszögekhez (háromszögekhez) nem társítottunk zöld csúcs nélküli konvex sokszöget a fenti módon. Ezen háromszögek száma megegyezik azon szakaszok számával, amelyeknek egyik végpontja sem zöld. Az eredeti sokszögnek két olyan oldala van, amelynek egyik végpontja zöld, így $2023 - 2 = 2021$ olyan oldala van, amelynek egyik végpontja sem zöld. **(1 pont)**
A megadott 2023 oldalú sokszögnek $\frac{2023(2023-3)}{2} = 2023 \cdot 1010 = 2\,043\,230$ átlója van. A zöld csúcsból kiinduló átlók száma pedig $2023 - 3 = 2020$. Így a zöld csúcsot nem tartalmazó átlók száma

$$\frac{2023 \cdot 2020}{2} - 2020 = \frac{2021 \cdot 2020}{2} = 2021 \cdot 1010 = 2\,041\,210. \qquad \textbf{(3 pont)}$$

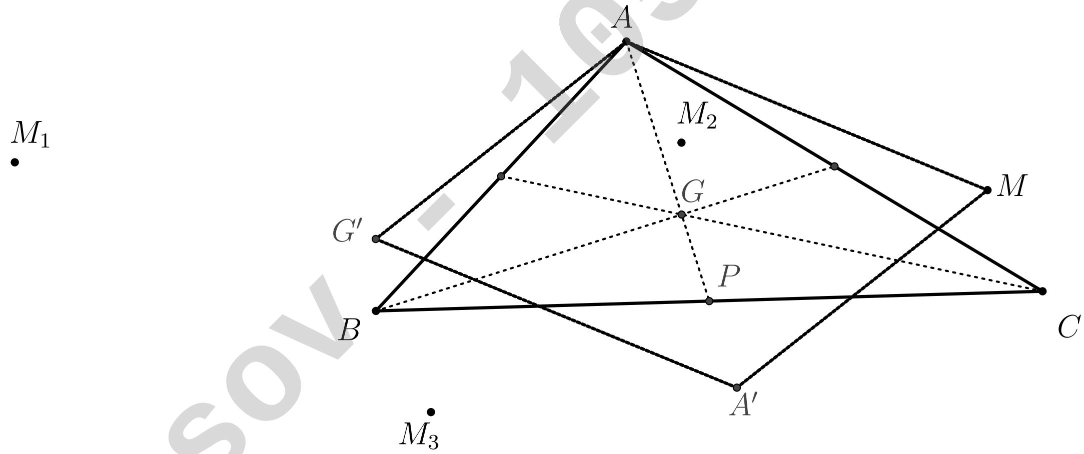
Következésképpen a zöld csúcsot tartalmazó háromszögek szerkesztéséhez 2021 oldalt és $1010 \cdot 2021$ átlót, azaz $2021 + 1010 \cdot 2021 = 2021 \cdot 1011 = 2\,043\,231$ szakaszt használtunk fel. **(1 pont)**
Tehát az egy zöld csúccsal is rendelkező konvex sokszögek száma 2 043 231-gyel több, mint azoknak a konvex sokszögeknek a száma, amelyeknek nincs zöld csúcsa. **(1 pont)**
■

4. feladat (10 pont)**.** Az ABC háromszög síkjában lévő M pont szimmetrikusát az AB, AC és BC oldalak felezőpontjára nézve jelölje M_1, M_2 és M_3. Továbbá legyen A' a sík azon pontja, amelyre $\overrightarrow{A'A} = 2(\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$. Igazold, hogy ha az A, A' és M pontok nem kollineárisak, akkor az $AG'A'M$ négyszög egy paralelogramma, ahol G' az $M_1M_2M_3$ háromszög súlypontja.

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Ha P a BC szakasz felezőpontja, akkor a sík tetszőleges Q pontja esetén $\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = 2\overrightarrow{QP}$, sajátosan $Q = A'$ esetén kapjuk, hogy $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{A'P}$. Így a megadott $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \frac{\overrightarrow{A'A}}{2}$ feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy $\overrightarrow{A'A} = 4\overrightarrow{A'P}$. Ez pedig egyenértékű azzal, hogy $\overrightarrow{A'P} + \overrightarrow{PA} = 4\overrightarrow{A'P}$, ahonnan $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{A'P}$. Továbbá $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PG}$, ahol G az ABC háromszög súlypontja. Következésképpen $\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{PG}$. Ez azt jelenti, hogy A' pont a G pontnak a szimmetrikusa a P pontra nézve, sőt a

G pont az AA' szakasz felezőpontja. **(3 pont)**



Mivel G súlypontja az ABC háromszögnek, ezért

$$\overrightarrow{MG} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3}.$$ **(1 pont)**

Másrészt

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MG'} &= \frac{\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}}{3} \\
&= \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3} \\
&= \frac{2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})}{3} = 2 \cdot \overrightarrow{MG}.
\end{aligned}$$

(3 pont)

Mivel $\overrightarrow{MG'} = 2\overrightarrow{MG}$, ezért a G pont felezőpontja az MG' szakasznak is, tehát az $AG'A'M$ négyszög átlói felezik egymást, így ez a négyszög egy paralelogramma. **(2 pont)**

■