V. Országos Magyar Matematikaolimpia
XXXII. EMMV
megyei szakasz, 2023. február 4.

V. osztály

1. feladat (10 pont)**.** Adott a $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ számsorozat.

a) Állapítsd meg milyen szabály szerint követik egymást a sorozat tagjai, majd írd fel a következő hat tagot.

b) Ha a sorozat első 2022 tagját négyzetre emeljük és ezeket összeadjuk, mi lesz az eredmény utolsó számjegye?

Matlap 9/2022, A: 4626

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Vizsgáljuk az egymás utáni tagok különbségét: $5-2=3, 8-5=3, 11-8=3, 14-8=3$ Láthatjuk, hogy mind a négy esetben 3-at kaptunk, így megfogalmazható a szabály: a sorozat minden tagja az előző tagnál 3-mal nagyobb, vagy a következő tagot úgy kapjuk, hogy az előző taghoz hozzáadunk 3-at. **(1 pont)**
Így a soron következő hat tag: $14+3=17, 17+3=20, 20+3=23, 23+3=26, 26+3=29$ és $29+3=32$. **(1 pont)**

b) A sorozat négyzetre emelt tagjainak utolsó számjegyét vizsgáljuk, mert az összeg utolsó számjegye ezektől fog függni. **(1 pont)**
A sorozat eddig meghatározott tagjainak utolsó számjegye: $2, 5, 8, 1, 4, 7, 0, 3, 6, 9, 2$. A sorozat további tagjai $35, 38, 41, 44, 47, 50, \ldots$.
Utolsó számjegyeik, a 2-es után, $5, 8, 1, 4, 7, 0, \ldots$ és így tovább. **(1 pont)**
Észrevesszük, hogy a sorozat tagjainak utolsó számjegye 10-esével ismétlődik. **(1 pont)**
Megvizsgáljuk, hogy az első 10 tag utolsó számjegyének a négyzete milyen számjegyre végződik. A következő számjegyeket kapjuk: $4, 5, 4, 1, 6, 9, 0, 9, 6, 1$. **(1 pont)**
A négyzetek utolsó számjegyének összege: $4+5+4+1+6+9+0+9+6+1=45$. **(1 pont)**
Mivel a tagok utolsó számjegyeiből alkotott sorozat 10-esével ismétlődik, a négyzeteik utolsó számjegyeiből alkotott sorozat is 10-esével fog ismétlődni. 2022 tag négyzeteinek utolsó számjegye esetén 202-szer ismétlődik és még marad két tag négyzetének utolsó számjegye, a 4 és 5. **(1 pont)**
Ezek szerint a $202 \cdot 45 + 4 + 5$ utolsó számjegyét keressük, ami pontosan 9. Tehát a tagok négyzetei összegének utolsó számjegye 9. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$, $\ldots$, $a_n = 3 \cdot (n-1) + 2$, ahol n természetes szám. **(1 pont)**
A következő tagok: $a_6 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$, $a_7 = 3 \cdot 6 + 2 = 20$, $a_8 = 3 \cdot 7 + 2 = 23$, $a_9 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$,

$a_{10} = 3 \cdot 9 + 2 = 29$, $a_{11} = 3 \cdot 10 + 2 = 32$. **(1 pont)**

b) Folytatjuk a sorozatot, még felírunk pár tagot: $a_{12} = 3 \cdot 11 + 2 = 35, a_{13} = 3 \cdot 12 + 2 = 38$. Látható, hogy a sorozat első tíz tagjának az utolsó számjegye különböző viszont a 11., 12., 13. tag utolsó számjegye azonos az első három tag utolsó számjegyével.
Az utolsó számjegyek tízesével ismétlődnek. **(1 pont)**
Tehát az összeg $202 \cdot 10 + 2$ tagot tartalmaz. **(1 pont)**
Az utolsó két tag pedig: $a_{2021} = 3 \cdot 2020 + 2 = 6062, a_{2022} = 3 \cdot 2021 + 2 = 6065$ **(1 pont)**
Továbbá felírható az összeg: $2^2+5^2+8^2+11^2+14^2+17^2+20^2+23^2+26^2+29^2+32^2+\ldots+6062^2+6065^2$
Az összeg utolsó számjegye:
$u(2^2+5^2+8^2+11^2+14^2+17^2+20^2+23^2+26^2+29^2+32^2+\ldots+6062^2+6065^2) =$ **(1 pont)**
$u[202 \cdot (4+5+4+1+6+9+0+9+6+1)+4+5] =$ **(1 pont)**
$u(202 \cdot 45 + 9) =$ **(1 pont)**
$u(9099) = 9$ **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont)**.** Egy mókus a tölgyfa, a bükkfa és a jegenyefa odújába összesen 156 makkot és mogyorót gyűjtött össze fáradságos munkával. A tölgyfa odújába a makkok száma megegyezik a mogyorók számával. A bükkfa odújában 6-tal kevesebb termés került, mint a tölgyfaodúba, de kétszer több makk, mint mogyoró. A jegenyefa odújában 12 darab terméssel kevesebbet szedett össze, mint a bükkfaodúba, de kétszer annyi mogyorót, mint makkot.

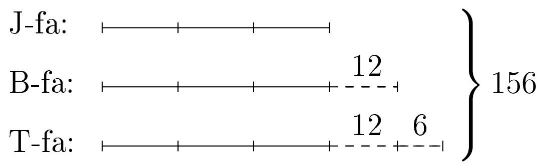
a) Hány makk van a jegenyefa odújában?

b) Hány mogyorót gyűjtött összesen a mókus?

Hamar Erzsébet, Masrosvásárhely

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen egy szakasz hossza a jegenyefa odújában található makkok száma, amit jelölünk x-szel:



(2 pont)

$9x + 2 \cdot 12 + 6 = 156$ **(1 pont)**
$9x = 126$ **(1 pont)**
$x = 14$, tehát 14 makkot gyűjtött a mókus a jegenyefa odújába. **(1 pont)**

b) A jegenyefa odújában a mogyorók száma $= 2 \cdot 14 = 28$ **(1 pont)**
A bükkfa odújában a mogyorók száma $= (14 + 28 + 12) : 3 = 18$ **(1 pont)**
A tölgyfa odújában a mogyorók száma $= (14 + 28 + 12 + 6) : 2 = 30$ **(1 pont)**
Összesen: $28 + 18 + 30 = 76$ mogyorót gyűjtött a mókus. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel a tölgyfába tett mogyorók száma megegyezik a makkok számával ezért $2 \cdot m$ mennyiségű termés található ebben az odúban. (m a termések számának fele a tölgyfaodúban). A bükkfába gyűjtött termések száma 6-tal kevesebb, mint ami a tölgyfában található, vagyis $2 \cdot m - 6$. A jegenyefában ehhez képest 12-vel kevesebb darab van, ami azt jelenti, hogy 18-cal kevesebb a darabszám, mint a tölgyfa odújában, vagyis $2 \cdot m - 18$. **(2 pont)**
Összesen az egyes faodvakban:
$2 \cdot m + 2 \cdot m - 6 + 2 \cdot m - 18 = 156$ termés található **(1 pont)**
$6 \cdot m = 156 + 6 + 18$
$6 \cdot m = 180$
$m = 30$ darab termés **(1 pont)**
A jegenyefában lévő termések száma $2 \cdot m - 18 = 2 \cdot 30 - 18 = 42$ darab. Mivel itt a mogyorók száma duplája a makkok számának, ezért három rész termés található, amiből egy rész a makkok száma, így $42 : 3 = 14$ darab makk van a jegenyeodúban. **(1 pont)**

b) A fentiekből következik, hogy a tölgyfa odújában 30 mogyoró, **(1 pont)**
míg a jegenyéjében 28 darab mogyoró található. **(1 pont)**
A bükkfába $2 \cdot m - 6 = 2 \cdot 30 - 6 = 54$ darab termést gyűjtött a mókus. Mivel a makkok száma kétszer több a mogyorók számánál, ezért három rész termés található itt. Ebből egy rész 18 darabot jelent, ami pontosan a mogyorók darabszámát adja. **(1 pont)**
Tehát a mókus összesen $30 + 18 + 28 = 76$ mogyorót gyűjtött a három fa odújába. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). a) Írd fel az összes eddig előfordult, időszámításunk szerinti (Krisztus utáni) évszámot, amelyik csak a 7^a és 17^b szorzótényezőket tartalmazza, ahol a, b természetes szám!
b) Legközelebb hány év múlva fordul elő ilyen tulajdonságú évszám a jövőben?

Hodgyai Edit, Micske

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) $0 < 7^a \cdot 17^b \leq 2023$, mivel $2023 = 7 \cdot 17^2$. **(1 pont)**
Felírjuk az összes lehetséges esetet
$a = 0$ és $b = 0$, $7^0 \cdot 17^0 = 1$,
$a = 0$ és $b = 1$, $7^0 \cdot 17^1 = 17$, **(1 pont)**
$a = 0$ és $b = 2$, $7^0 \cdot 17^2 = 289$,
$a = 1$ és $b = 0$, $7^1 \cdot 17^0 = 7$, **(1 pont)**
$a = 1$ és $b = 1$, $7^1 \cdot 17^1 = 119$,
$a = 1$ és $b = 2$, $7^1 \cdot 17^2 = 2023$, **(1 pont)**
$a = 2$ és $b = 0$, $7^2 \cdot 17^0 = 49$,
$a = 2$ és $b = 1$, $7^2 \cdot 17^1 = 833$, **(1 pont)**
$a = 3$ és $b = 0$, $7^3 \cdot 17^0 = 343$.
Tehát a keresett, időszámításunk szerinti évszámok: $1, 7, 17, 49, 119, 289, 343, 833, 2023$. **(1 pont)**

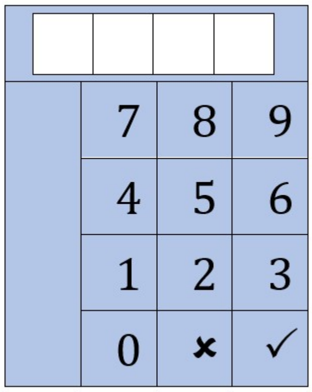
b) A hatványkitevőket rendre eggyel növelve, felírjuk a fenti esetek rákövetkezőit:
$7^0 \cdot 17^3 = 4913$, $7^1 \cdot 17^3 = 34391$, $7^2 \cdot 17^2 = 14161$, $7^3 \cdot 17^1 = 5831$, $7^4 \cdot 17^0 = 2401$. **(1 pont)**

Látható, hogy $2401 < 4913 < 5831 < 14161 < 34391$ **(1 pont)**
Tehát a következő ilyen tulajdonságokkal rendelkező évszám a 2401.
Így $2401 - 2023 = 378$ év múlva fordul újra elő. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont)**.**

Gombóc Artúr egy lekódolt széfben tartja a legritkább csokoládéit. Ahhoz, hogy ki tudja nyitni a széfet egy négy számjegyből álló számot kell beírnia, ahogy az ábrán a digitális kijelző is mutatja. Ha véletlenül elrontja a kódot, akkor 5 percet kell várnia, hogy újabb kóddal próbálkozhasson.
Gombóc Artúr csak vasárnaponként ebéd után pontosan 15:00 órakor falatozik a csokoládékból. Egyik vasárnap viszont, amikor 10:00 órakor elő akarta készíteni a csokoládékat, nem jutott eszébe a kód, hogy kinyithassa a széf ajtaját. Arra emlékezett viszont, hogy a kód két középső számjegye páros, míg a két szélén lévő páratlan, ugyanakkor nincs benne két azonos számjegy, valamint van közöttük 0-ás és 1-es.



a) Ki tudja-e próbálni az összes lehetőséget Gombóc Artúr úgy, hogy 15:00 órakor biztosan ehessen a ritka csokoládékból?

b) Hányszorosára nőtt volna a lehetséges kódok száma, ha Gombóc Artúr úgy emlékszik, hogy a kód két középső számjegye páros, míg a két szélén lévő páratlan, valamint, hogy nem volt közöttük 0-ás és 1-es?

Polgár István, Gyergyószentmiklós

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A kód a következő minták közül kerülhet ki:

1. $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{\text{páros}}\boxed{\text{páratlan}}$
2. $\boxed{1}\boxed{\text{páros}}\boxed{0}\boxed{\text{páratlan}}$
3. $\boxed{\text{páratlan}}\boxed{0}\boxed{\text{páros}}\boxed{1}$
4. $\boxed{\text{páratlan}}\boxed{\text{páros}}\boxed{0}\boxed{1}$

A páros számjegyek a $0, 2, 4, 6, 8$, ezek közül a 0 már nem lehet, mivel egyforma számjegyek nem szerepelnek a kódban. Így a lehetséges páros számjegyek a $2, 4, 6, 8$. A páratlan számjegyek az $1, 3, 5, 7, 9$, ezek közül az 1 már nem lehet, mivel egyforma számjegyek nem szerepelnek a kódban. Így a lehetséges páratlan számjegyek a $3, 5, 7, 9$. A minták mindegyikében egy páros és egy páratlan számjegy hiányzik, így elegendő egy mintát megvizsgálni, majd az ott megjelent lehetőségek számát megszorozni 4-gyel. Az első mintát választva az első 4 lehetőség: $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{3}$ $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{5}$ $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{7}$ $\boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}\boxed{9}$. A további lehetőségek is hasonlóan alakulnak, csak 2 helyett a 4, 6 és 8 számjegyekkel, a harmadik pozíción.
Tehát $4 \cdot 4 = 16$ lehetőség van összesen az első minta esetén. **(2 pont)**
Ezt még 4-gyel megszorozva kapjuk, hogy $16 \cdot 4 = 64$ kódot kell kipróbáljon Gombóc Artúr, ami $64 \cdot 5 = 320$ percbe kerül. **(1 pont)**

10:00 órától 15:00 óráig pontosan 5 órája, vagyis 300 perce van Artúrnak.
Tehát nem elegendő az idő az összes kód kipróbálására, így 15:00 órakor Artúr nem biztos, hogy ehet a ritka csokoládékból. **(1 pont)**

b) A kód csupán egy mintát követhet: | páros | páratlan | páratlan | páros |. A páros számjegyek a $0, 2, 4, 6, 8$, ezek közül a 0 nem lehet, mert Artúr úgy emlékezett, hogy a 0-ás nem szerepel a kódban. Így a lehetséges páros számjegyek a $2, 4, 6, 8$. A páratlan számjegyek az $1, 3, 5, 7, 9$, ezek közül az 1 nem lehet, mert Artúr úgy emlékezett, hogy az 1-es nem szerepel a kódban. Így a lehetséges páratlan számjegyek a $3, 5, 7, 9$. Rögzítsük le az első számjegyet a lehető legkisebb páros számjegyre, ami a 2-es, valamint a második számjegyet a lehető legkisebb páratlan számjegyre, ami a 3-as. Ezután rögzítsük a 3. számjegyet is le a lehető legkisebb páratlan számjegyre, ami a 3 (lehetnek egyforma számjegyek).
Ekkor az utolsó helyre bekerülhet a $2, 4, 6, 8$ valamelyike, ami 4 lehetőséget jelent. **(1 pont)**
Ha a harmadik pozíción a 3-as számjegyet az 5, 7 vagy 9 számjegyekre cseréljük szintén $4-4$ lehetőséget kapunk, így $4 \cdot 4 = 16$ lehetőségnél tartunk. **(1 pont)**
A második pozíción a 3-as számjegy helyett még elhelyezhetjük az 5, 7 vagy 9 számjegyeket, így a lehetőségek száma $4 \cdot 16 = 64$-re növekszik. **(1 pont)**
Végül pedig az első pozíción a 2-es számjegy helyére még a 4, 6 és 8 számjegyek kerülhetnek, ami $4 \cdot 64$ lehetőséget jelent így összesen. **(1 pont)**
A szorzatot nem is érdemes kiszámítani, hisz jól mutatja, hogy az előző alpont 64 lehetőségénél 4-szer több lehetőség van ebben az esetben. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

1. | 1 | 0 | páros | páratlan | $\rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = 16$ lehetőség
2. | 1 | páros | 0 | páratlan | $\rightarrow 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16$ lehetőség
3. | páratlan | 0 | páros | 1 | $\rightarrow 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 = 16$ lehetőség
4. | páratlan | páros | 0 | 1 | $\rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16$ lehetőség **(2 pont)**

Összesen $4 \cdot 16 = 64$ lehetőséget kellene kipróbálnia, hogy biztosan kinyithassa a széfet. Erre $64 \cdot 5 = 320$ percre lenne szüksége. **(1 pont)**
10:00 órától 15:00 óráig 5 óra = 300 perc van, így nem lesz ideje minden lehetőséget kipróbálni, így 15:00 órakor Artúr nem biztos, hogy ehet a ritka csokoládékból. **(1 pont)**

b) | páros | páratlan | páratlan | páros |

A használható páros számjegyek: $2, 4, 6, 8$
A használható páratlan számjegyek: $3, 5, 7, 9$ **(1 pont)**
A lehetőségek száma így $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \cdot 4$, mivel lehetnek ugyanolyan számjegyek is. **(2 pont)**
Tehát a lehetséges kódok száma a négyszeresére nőtt. **(1 pont)**

■